MATHEMATISCHE BESLISKUNDE: 'THEORIE en PRAKTIJK'

prof.dr. G. de Leve

Centrum voor Wiskunde en Informatica
Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam

1. INLEIDING

Besliskunde is de studie die zich bezighoudt met het streven om beslissingsproblemen op zodanige wijze te vertalen in wiskundige problemen, dat de oplossing van de wiskundige versie van het beslissingsprobleem na terugvertaling de gevraagde beslissing of strategie oplevert.

Alhoewel het tijdstip waarop voor het eerst besliskunde werd bedreven, moeilijk is te bepalen, kan men toch wel zeggen dat de besliskunde zijn opkomst dankt aan de gecompliceerde beslissingsproblemen, waarvoor men zich in de Tweede Wereldoorlog gesteld zag. Daarna bleek de ontwikkelde benaderingswijze ook goed bruikbaar voor het oplossen van tal van beslissingsproblemen op het gebied van het beheer, de produktie en het transport.

In de besliskunde onderscheidt men twee typen van beslissingsituaties. Beslissingssituaties, waarin van de beslisser wordt verwacht dat hij slechts één enkele *beslissing* neemt, leiden tot zgn. *één-stapsbeslissingsproblemen.* Er zijn daarentegen ook beslissingssituaties waarin de beslisser in een al of niet begrensd tijdinterval een reeks van min of meer op elkaar afgestemde beslissingen moet nemen. De oplossing van deze *meer-stapsbeslissingsproblemen* wordt gegeven door een *strategie*; d.i. een beslissingvoorschrift dat voor ieder tijdstip vaststelt of de beslisser een beslissing moet nemen, en zo ja, welke dit zal zijn.

Het vertalen van een beslissingsprobleem in een wiskundig problem is onverbrekelijk verbonden aan het construeren van een *wiskundig model* van de te beschouwen beslissingsituatie. In een dergelijk model wordt de onderlinge samenhang en de evolutie van de verschillende voor de beslissingssituatie relevante factoren op wiskundige wijze beschreven. Bij de beschrijving wordt gebruik gemaakt van *kennis* die, hetzij door de basis-wetenschappen, zoals economie en wiskunde, wordt verschaft, hetzij uit beschikbare *gegevens* wordt gedistilleerd of uit *waarnemingen* wordt verkregen. Bovendien berust het wiskundige model op *veronderstellingen* die op het eerste gezicht redelijk lijken en niet op grond van de zojuist genoemde kennis dienen te worden verworpen. De kansrekening en de mathematische statistiek spelen een belangrijke rol bij het opstellen en testen van het wiskundige model.

Een belangrijk punt bij de de constructie van het wiskundige model is de keuze van het *kriterium* voor het onderling vergelijken van beslissingen en strategieën. In veel beslissingsproblemen houdt het kriterium nauw verband met de kosten of de gemiddelde kosten per tijdseenheid; bij sommige produktieproblemen zou men bijv. als kriterium het aantal produktiewijzingingen per tijdseenheid kunnen kiezen. Belangrijk is deze keuze van het kriterium, omdat de structuur van het kriterium dikwijls bepalend is voor de vraag of de wiskundige versie van het beslissingsprobleem al of niet met de huidige kennis en hulpmiddelen kan worden opgelost. In de praktijk betekent dit dat *vereenvoudigingen* in het model moeten worden aangebracht. Uiteraard moet dan worden nagegaan in hoeverre deze vereenvoudigingen het antwoord bepalen. Zowel nieuwe gegevens als onaanvaardbare "optimale" beslissingen leiden tot verwerping van het bestaande model en dus tot het opstellen van een nieuw.

Een groot deel van de besliskundige research heeft betrekking op het oplossen van speciale typen van wiskundige problemen. Dit onderdeel van de besliskunde wordt wel eens aangegeven met de naam *mathematische besliskunde.* De mathematische besliskunde omvat studies die betrekking hebben op de meest uitéénlopende onderdelen van de wiskunde. Het samenbindende is het dienstbaar zijn aan de analyse van beslissingssituaties. In de hierna volgende secties zullen wij daarvan voorbeelden zien.

Ieder besliskundig onderzoek begint met een inventarisatie van mogelijke beslissingen of strategieën. Om de effecten van deze beslissingen en strategieën op wiskundige wijze te kunnen bestuderen, dient de beslisingssituatie voldoende kwantificeerbaar te zijn. Aangezien in beslissingssituaties het doen van experimenten veelal is uitgesloten, komen alleen die situaties voor een besliskundig onderzoek in aanmerking, waarvoor geldt dat het vereiste model een doorzichtige structuur bezit. Dit zijn dan ook de redenen waarom besliskundige technieken tot dusver voornamelijk hun toepassing vonden bij het oplossen van bedrijfsproblemen. In principe beperkt de toepassing van besliskundige technieken zich echter niet tot één of meer probleemgroepen.

In tal van beslissingssituaties moeten beslisingen zonder dralen kunnen worden genomen. Dit betekent dat van een computer wordt verwacht dat hij, mits voorzien van optimaliseringstechnieken en beschikbare informatie, de beslisser via het beeldscherm een voorstel kan doen. In het grensgebied van besliskunde en informatica zijn interessante ontwikkelingen gaande.

2. EEN-STAPSBESLISSINGSPROBLEMEN

Bij één-stapsbeslissingsproblemen start de wiskundige modelvorming met het wiskundig beschrijven van de mogelijke *beslissingen.* Het is gebruikelijk om een beslissing, waaraan n kwantitatieve aspecten te onderscheiden zijn, aan te geven door een vector x met n componenten

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

in een mengprobleem bijv. stellen deze componenten de fracties van de n samenstellende gronstoffen voor. Ook niet-kwantitatieve beslissingen laten zich dikwijls voor vectoren weergeven. Zo kan de vector $x = (0,1,0)$ uitdrukken dat de machine 2 wèl ($x_2 = 1$) en de machines 1 en 3 niet ($x_1 = x_3 = 0$) worden gebruikt bij de komende produktie. Uit de voorgaande toelichting volgt dat sommige componenten van de beslissingsvector alleen geheeltallige waarden mogen aannemen. De verzameling van indices j waarvoor x_j geheel moet zijn, wordt in het hiernavolgende steeds aangeduid met G. Omstandigheden, al dan niet typerend voor het beslissingstijdstip, beperken veelal de keuzemogelijkheden. Voor het bovengenoemde mengproblem moet in ieder geval gelden:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2, \ldots, n),$$

maar misschien ook

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \leqslant b,$$

wanneer het mengsel, een veevoeder, hoogstens een fractie b aan ruwe celstof mag bevatten en voor de samenstellende grondstoffen grondstoffen deze fracties volgens recente analyses $a_j (j = 1,2, \ldots, n)$ bedragen. Andere kwaliteitseisen leiden tot soortgelijke voorwaarden.

In het wiskundige model wordt de verzameling van *toegelaten beslissingen* X gegeven door gelijk- en ongelijkheden waaraan de componenten van de beslissingsvector moeten voldoen. Het opstellen van deze relaties vormt dikwijls het moeilijkste onderdeel van de modelvorming en vraagt enige oefening. Zo zal de formulering van het wiskundig equivalent van de voorwaarde: "de gronstoffen 1 en 2 mogen dan en slechts dan beide in het mengsel voorkomen als de fractie van gronstof 3 groter dan of gelijk is aan die van 4" wel enige moeite opleveren. In het wiskundig model wordt deze voorwaarde gegeven door:

$$x_1 \leqslant x_{n+1}, x_2 \leqslant x_{n+2}, x_4 - x_3 \leqslant x_{n+3},$$

$$x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} \leqslant 2 \quad (n+1, n+2, n+3 \in G),$$

waarbij x_{n+1}, x_{n+2} en x_{n+3} nieuwe componenten zijn. (Ga na: $x_1 > 0$ én $x_2 > 0 \rightarrow \rightarrow x_{n+1} = x_{n+2} = 1 \rightarrow x_{n+3} = 0 \rightarrow x_3 \geqslant x_4$.)

Om een keuze te kunnen maken uit de verzameling is een *kriterium* vereist.

Als voor gronstof j de kosten per eenheid c_j bedragen dan kan wellicht de functie

$$k = c_1x_1+c_2x_2+ \cdots +c_nx_n$$

als kriterium dienen. In het algemeen is het optimaliteitskriterium een functie $K(x_1,x_2, \ldots, x_n)$ van de componenten van de beslissingsvector $x \in X$.

De wiskunde versie van het één-stapsbeslissingsprobleem luidt nu als volgt: "Bepaal het maximium (minimum) van $k = K(x_1,x_2, \ldots, x_n)$ onder $x \in X$ en $x_j =$ geheel als $j \in G$."

De studie gericht op het oplossen van problemen van dit type heet *mathematische programmering*. Als alle definiërende functies lineair zijn en de verzameling G leeg is, dan spreekt, men van *lineaire programmering* (lp). Vele toewijzings-, produktie-, transport-, maar ook financieringsproblemen laten zich vertalen als lp-problemen. Kortom, problemen waarin schaarse middelen als kapitaal, capaciteiten, arbeid etc. zodanig benut moeten worden dat de winst maximaal is of de kosten minimaal zijn. Zowel voor de algemene versie (de simplexmethode) als voor lp-problemen met een speciale structuur zijn algoritmen ontwikkeld, die problemen van grote omvang in een redelijke tijd kunnen oplossen. De wiskundige achtergrond van deze methoden wordt gevormd door de lineaire algebra. Immers voegen wij aan iedere ongelijkheid een verschilvariabele toe,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \text{ en } x_{n+i} \geqslant 0$$

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \quad \Leftrightarrow \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \text{ en } x_{n+i} \geqslant o,$$

dan wordt het lp-problem in matrixnotatie gegeven door:

$$\left.\begin{aligned} \max z &= CX \\ \text{onder } A, X &= b \\ X &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} lp\,1$$

waarbij A een $m \times (n+s)$-matrix is wanneer de m voorwaarden een s-tal ongelijkheden bevatten
X is een vector; $x_i =$ component van die vector
A, B, R zijn matrices

C is een vector	X_R is een vector
C_B is een vector	b is een vector
C_R is een vector	U is een vector
X_B is een vector	U_v is een vector

Laat een basismatrix B gevormd worden door m lineaire onafhankelijke kolommen uit A en laat R de overige kolommen voorstellen in A. Men kan eenvoudig nagaan dat

$$AX = b \Leftrightarrow B^{-1}RX_R + X_B = B^{-1}b$$

$$CX = C_B X_B + C_R X_R = C_B B^{-1}b + (C_R - C_B B^{-1}R)X_R,$$

waarbij

a) $X_B(X_R)$ die componenten uit X bevat welke corresponderen met kolommen uit $B(R)$

b) $C_B(C_R)$ die componenten uit C bevat welke corresponderen met componenten uit $X_B(X_R)$.

Uit bovenstaande volgt dat lp1 ook in de z.g.n. B-basisvorm geschreven kan worden:

$$\max Z = C_B B^{-1}b + (C_R - C_B B^{-1}R)X_R$$

onder

$$B^{-1}RX_R + X_B = B^{-1}b$$

$$(X_R, X_B) \geqslant 0$$

De oplossing

$$X_B = B^{-1}b \text{ en } X_R = 0$$

zullen wij een basisoplossing nemen.

Merk op dat een basisoplossing

1) toegelaten is als $B^{-1}b \geqslant 0$

2) optimaal is als $B^{-1}b \geqslant$ én $C_R - C_B B^{-1}R \leqslant 0$

3) de kriteriumwaarde $C_B B^{-1}b$ bezit

De oplossing van het lp-probleem kan o.a. worden verkregen door te starten met een B matrix waarvoor geldt: p dat als $C_R - C_B B^{-1}R \leqslant 0$ $B^{-1}b \geqslant 0$. In iedere volgende stap wordt één kolom uit B geruild voor een kolom uit R. De gekozen kolom uit R correspondeert met een hoogste positieve component in $C_R - C_B B^{-1}R$ (de simplexmethode). Merk op dat als $C_R - C_B B^{-1}R \leqslant 0$ de optimale oplossing reeds is gevonden. De kolom uit B, die moet plaats maken, volgt uit het verlangen dat

a) voor de nieuwe basis B ook geldt: $X_B = B^{-1}b \geqslant 0$ en

b) $(C_B B^{-1}b,\ C_B B^{-1}A - C)$ lexicografisch toeneemt.

Aan beide verlangens kan worden voldaan, zodat na een eindig aantal stappen, vanwege de eindigheid van het aantal B-matrices, een optimale basisoplossing wordt gevonden. Met lp1 is onverbrekelijk verbonden het *duale* probleem:

$$\min Z = b'u$$

onder

$$A'u \geqslant C^1$$

$$-\infty < u < +\infty$$

of met verschilvariabelen:

$$\left.\begin{aligned} \min Z = b'u \text{ onder } A'u - U_v &= c' \\ -\infty < u &< +\infty \\ U_v &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} dlp\,1$$

De dualiteitstheorie van de lineaire programmering leert ons

1) het duale probleem van een basisvorm van het primale probleem (lp1) is een basisvorm van (dlp1) en dus
2) er is een 1-1-relatie tussen basis matrices van lp1 en dlp1.
3) er is een 1-1-relatie tussen basisoplossingen van lp1 en dpl1.
4) de optimale oplossing van het primale probleem $(B^{-1}b, 0)$ is gekoppeld aan de optimale oplossing van het duale probleem $(C_B B^{-1}, C_B B^{-1}A - C)$.
5) $\max Z = \min Z = C_B B^{-1} b$.

De hierboven geschetste methode levert ons niet alleen een optimale oplossing van lp1 maar tegelijkertijd ook één van dlp1. Uit punt 4) volgt van de optimale component u_i

$$u_i = \frac{\partial Z^*(b)}{\partial b_i} = \frac{\partial C_B B^{-1} b}{\partial b_i} = (C_B B^{-1})_i$$

waarbij $Z^*(b)$ de maximale waarde is van lp1 als functie van b. Conclusie: De oplossing van het primale probleem geeft antwoord op de gestelde vraag. De oplossing van het duale probleem geeft inzicht in de wijze waarop het gevonden resultaat afhangt van de rechterleden b_i van de primale voorwaarden. Als door een financieel offer het rechterlid b_i kan worden verhoogd tot $b_i + 1$, dan geeft u_i (marginaal) aan hoeveel de opbrengst toeneemt. De componenten u_i worden dan ook wel schaduwprijzen genoemd.

Lp-problemen van grote omvang kunnen in een redelijke tijd worden opgelost. Minder gunstig is de situatie als de verzameling G niet leeg is. De desbetreffende studie wordt *geheeltallige-* of *gemengde programmering* genoemd. Technieken (snedemethoden), die uitgaan van de algemene probleemstelling, zijn tot dusver niet zo succesvol geweest. Vandaar dat het onderzoek thans veel meer gericht is op specifieke structuren (branch and bound methoden). Bij de beschrijving van de beslissingssituaties kan dikwijls met succes gebruik gemaakt worden van begrippen uit netwerkanalyse en de grafentheorie. Daar vele beheers- en bedrijfsproblemen, waaronder (machine)volgorde-, vervoers-, indelings- en planningsproblemen, slechts vertaald kunnen worden in gemengde lp-problemen, is dit onderzoek zeer intensief. Ter afsluiting een tweetal voorbeelden van een geheeltallig programmeringsprobleem.

Voorbeeld 1 (een routeringsprobleem)

Gegeven een centraalmagazijn van waaruit $n-1$ vestigingen van een bedrijf worden bediend. Deze bediening geschiedt met behulp van m vrachtwagens, die het centraalmagazijn als vertrekpunt hebben en daarin ook terugkeren. De afstanden tussen de vestigingen worden gegeven door de afstandsmatrix C, waarvan de eerste rij en kolom betrekking hebben op het centraalmagazijn. De behoefte aan goederen (in tonnen) wordt van de vestiging i gegeven door q_i, terwijl vrachtwagen k een laadvermogen heeft van ϕ_k ton. Gevraagd voor iedere vrachtwagen een route te kiezen en wel zodanig dat het totaal af te leggen aantal kilometers van de vrachtwagens gezamelijk mimimaal is.

Formulering:

laat $x_{ijk} = 1$, als vrachtwagen k klant j bezoekt onmidddelijk na klant i;

$= 0$, anders.

laat $y_{ik} = 1$, als klant i wordt bezoekt door vrachtwagen k;

$= 0$, anders.

Wij beschouwen nu het volgende probleem

$$\min z = \sum_{ij} C_{ij} \sum_k x_{ijk} \tag{1}$$

onder

$$\sum_k y_{ik} = \begin{cases} 1, & i = 2, \ldots n \\ m, & i = 1 \end{cases} \tag{2}$$

$$\sum_i q_i y_{ik} \leqslant \phi_k, \quad k = 1, \ldots, m \tag{3}$$

$$\sum_j x_{ijk} = \sum_j x_{jik} = y_{ik}, \quad i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m \tag{4}$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ijk} \leqslant |S| - 1, \quad \forall S \subset \{2, \ldots, n\} \quad k = 1, \ldots, m \tag{5}$$

$$y_{ik} \in 0,1 \quad i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m \tag{6}$$

$$x_{ijk} \in 0,1 \quad i,j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m \tag{7}$$

De kriteriumfunctie (1) geeft het totaal af te leggen aantal kilometers aan. Voorwaarde (2) zorgt ervoor dat iedere klant één vrachtwagen op bezoek krijgt en dat er m vrachtwagen vertrekken uit het centraalmagazijn. Voorwaarde (3) dient om te voorkomen dat de vrachtwagens te zwaar worden beladen. Voorwaarde (4) zorgt ervoor dat vrachtwagen k vertrekt en aankomt in i, wanneer klant i op z'n route ligt. Voorwaarde (5) drukt uit dat er geen routes zijn zonder $i = 1$ (het centraalmagazijn).

Het behoeft geen betoog dat routeringsproblemen in de praktijk ingewikkelder zijn dat het hierboven geschetste. In ons tweede voorbeeld wordt gedemonstreerd hoe met behulp van begrippen uit de grafentheorie beslissingssituaties kunnen worden beschreven.

Voorbeeld 2 (een ontwerpprobleem)

Het architectenbureau Hut & Schuur heeft van het departement van Volkshuisvesting de opdracht gekregen een ontwerp te maken van een flatwoning dat maximaal te gemoet komt aan de wensen van de bewoner van vandaag. Om deze verlangens te leren kennen heeft Hut & Schuur een bureau voor opinieonderzoek ingeschakeld. In een onderzoek onder woningzoekenden wordt de ondervraagde een maquette getoond van een twee- kamerflat welke voldoet aan minimum eisen. Daarna wordt hem of haar verzocht de volgende items te ordenen in volgorde van belangrijkheid:

minimaal vloeroppervlak woonkamer 30m^2	luxe keuken
maximale maandhuur f 600,-	balkon
centraal antennesysteem	tuin
fietsenbergplaats of hobbyruimte	garage
gemeenschapsruimte	geluidsisolering
een derde kamer	lift
luxe badkamer	openhaard

Hut & Schuur willen deze items ook zelf ordenen en wel zodanig dat de gekozen volgorde maximaal overeenkomt met de geopenbaarde verlangens. Laat C_{ij} ondervraagden de voorkeur geven aan j boven item i.

Wij kunnen het beslissinsprobleem van Hut & Schuur nu als volgt beschrijven:

Gegeven een volledige graaf met evenveel hoekpunten als items. Aan iedere kant (i,j) zijn twee gewichten toegekent C_{ij} en C_{ji} afhankelijk van de gekozen richting. Gevraagd een gerichte acyclische deelgraafen van maximaal gewicht.

3. Meer-stapsbeslissingsproblemen

Met enige goede wil kan men stellen dat in ieder meer-stapsbeslissingprobleem van de beslisser verwacht wordt dat hij een proces bestuurt. Zo'n proces, waarin kosten worden gemaakt en/of opbrengsten worden verkregen, speelt zich bijvoorbeeld af rond een voorraad, machine of rij wachtenden voor een loket, kortom rond een *systeem.* De verschillende toestanden waarin het systeem zich kan bevinden, laten zich wiskundig beschrijven met behulp van een (toestands)vector S. Wanneer de beslisser zich afzijdig houdt en desondanks het systeem in de loop der tijd van toestand verandert, zegt men dat het systeem onderworpen is aan een *natuurlijk proces.* Een natuurlijk proces wordt wiskundig gegeven door de (kansverdeling van de) toestanden op toekomstige tijdstippen. Een en ander zullen wij nader toelichten met het volgende beeld. Laat S de omvang (toestand) zijn van een voorraad (systeem) die door verkopen op ongeregelde tijdstippen afneemt (natuurlijk proces). Elke maandagmorgen (beslissingstijdstip) wordt nagegaan of de voorraad moet worden aangevuld en, zo ja, met hoeveel (beslissing). De maximum voorraad stelt een bovengrens aan de omvang van de bestelling (verzameling van toegelaten beslissingen). Uit bovenstaand beeld volgt dat de toelaatbaarheid van een beslissing x mede bepaald wordt door de toestand S van het systeem op het beslissingstijdstip. De verzameling van toegelaten beslissingen wordt derhalve aangeduid met $x(S)$. Beslissingen brengen in het algemeen ook toestandsveranderingen met zich mee. Het begrip toestand dient derhalve zo ruim gekozen te zijn, dat de nieuwe toestand na de beslissing kan worden aangegeven. Als in bovenstaand beeld de bestelling onmiddellijk wordt afgeleverd, is de nieuwe toestand wederom een (toegenomen) omvang van een voorraad. Is daarentegen aan een bestelling een levertijd verbonden, dan moet hoogst waarschijnlijk aan de toestand bovendien afgelezen kunnen worden hoeveel goederen nog op bestelling wachten en wellicht ook wanneer de desbetreffende orders zijn afgegeven. Ook vanuit deze toestanden als begintoestand moet het natuurlijk proces kunnen worden beschreven. Het natuurlijk proces "regelt" dan niet alleen de aankomst van de klanten maar ook de aflevering van de bestellingen. Uiteraard moet een beslissing in een toestand uiteindelijk worden beoordeeld op grond van zijn effect op bijvoorbeeld de toekomstige kosten. Dit effect kan evenwel niet onafhankelijk van toekomstige beslissingen worden vastgesteld. Bijgevolg wordt in een meer-stapsbeslisingsprobleem niet gezocht naar een enkele optimale beslissing x, maar naar een optimale strategie z. Zo'n strategie beeldt op ieder beslissingstijdstip de toestandsruimte $\mathbb{S}$ af op de verzameling X van beslissingen. Een strategie heet toegelaten als van iedere $S \in \mathbb{S}$ geldt: $z(S) \in X(S)$.

Stel dat in ons voorraadprobleem de bestellingen direct worden afgeleverd zodat wij kunnen volstaan met een toestand die slechts de omvang van de voorraad aangeeft. Een strategie van het volgende type ligt dan voor de hand

$$x = z(S) = \begin{cases} 0 \text{ als } S > m \\ M - S \text{ als } S \leqslant m \end{cases}$$

waarbij M niet groter is dan de maximale voorraadcapaciteit. Merk op dat zo'n strategie geheel wordt bepaald door de keuze van (m, M).

Het is duidelijk dat zodra een strategie wordt toegepast het natuurlijke proces vanwege de extra toestandsveranderingen niet meer geëigend is om de ontwikkelingen in de toestand van het systeem te beschrijven. Deze taak wordt nu overgenomen door het *beslissingsproces* dat voor de te beschouwen strategieën en elke begintoestand gedefinieërd moet kunnen worden.

Voor het bepalen van een optimale strategie dient men te beschikken over een optimaliteitskriterium. Laat $K_\alpha(S, z, T)$ de verwachte verdisconteerde totale kosten (opbrengst) zijn als vanuit de toestand S de strategie z gedurende een periode T wordt toegepast. De verdiscintering met $\alpha \leqslant 1$ is dikwijls ook wiskundig noodzakelijk om $K_\alpha(S, z, T)$ voor grote waarden van T begrensd te houden. Indien verdiscontering niet reeël is, dan beschikt men over het alternatieve kriterium ($\alpha = 1$):

$$y(S:z) = \lim_{T \to \infty} \frac{K_1(S, z, T)}{T},$$

de gemiddelde kosten (opbrengst) per tijdseenheid. In praktische problemen is $y(S;z)$ constant op $\mathbb{S}$ en schrijven wij dus $y(z)$ De bepaling van de gemiddelde kosten $y(z)$ geschiedt evenwel simultaan met een grootheid $v(S:z)$

$$v(S:z) = \lim_{T \to \infty} \{K_1(S, z, T) - y(z)T\} \quad (S \in \mathbb{S}).$$

die wel een waardering toekent aan de begintoestand S.

Keren wij terug tot ons voorraad probleem. Stel dat $k(S, s)$ de verwachte kosten zijn in een week die begint met een voorraad S en een bestelling van de omvang x. Als $f(y)$ de kansdichtheid voorstelt van de behoefte y in die week, dan moet $K_\alpha(S, z, \infty)$ voldoen aan

$$K_\alpha(S, z, \infty) = k(S, z(S)) + \alpha \int_0^\infty K(S + z(S) - y, z, \infty) f(y) dy.$$

De optimale strategie z^* moet derhalve voldoen aan de optimaliteits vergelijking:

$$K_\alpha(S, z^*, \infty) = \min \{k(S, x) + \alpha \int_0^\infty K_\alpha(S + x - y, z^* \infty) f(y) dy \mid x \in x(S)\}$$

Ook voor de functies $y(z)$ en $v(S:z)$ bestaan dergelijke functinaal vergelijkingen.

Een veel gebruikte methode voor het bepalen van een optimale strategie is de z.g.n strategie-verbeteringsmethode. Deze methode stelt voor iedere strategie z vast of z optimaal is, en zo niet dan wijst zij een strategie aan die beter is. Op deze wijze ontstaat een rij van strategieën $\{z_n; n = 1, 2, \cdots\}$ die onder zekere voorwaarden convergeert naar een optimale strategie z^*.

Stel dat in ons voorraadprobleem in stap n van de strategieverbeteringmethode de strategie z_n was gevonden. De stap $n+1$ verloopt dan als volgt:

1) Los op de functionaal vergelijking

$$K_x(S;z_n,\infty) = k(S,z_n(S))+\alpha\int_0^\infty K_\alpha(S+z_n(S)-y,z_n,\infty)f(y)dy.$$

2) Bepaal voor iedere S een beslissing $x \in X(S)$ waarvoor bovenstaande uitdrukking minimaal is. Als $z_n(S)$ zo'n beslissing is, kies dan $x = z_n(S)$. De strategie z_{n+1} voor de volgende ronde wordt gegeven door de op deze wijze verkregen afbeelding van $\mathbb{S}$ op X. Als $z_{n+1}(S) = z_n(S)$ voor $S \in \mathbb{S}$ dan is $z_n = z_{n+1}$ optimaal.

De studie, die gericht is op het oplossen van meer-stapsbeslissingsproblemen, heet *dynamische programmering.* Een groot aantal voorraad-, vervangings- en produktieproblemen kan met behulp van een dynamisch programmeringstechniek worden aangepakt.

Voorbeeld 3 (een schadeprobleem)

Een automobilist heeft een schadeverzekering afgesloten. In de bijbehorende polis worden o.a. de volgende voorwaarden vermeld:

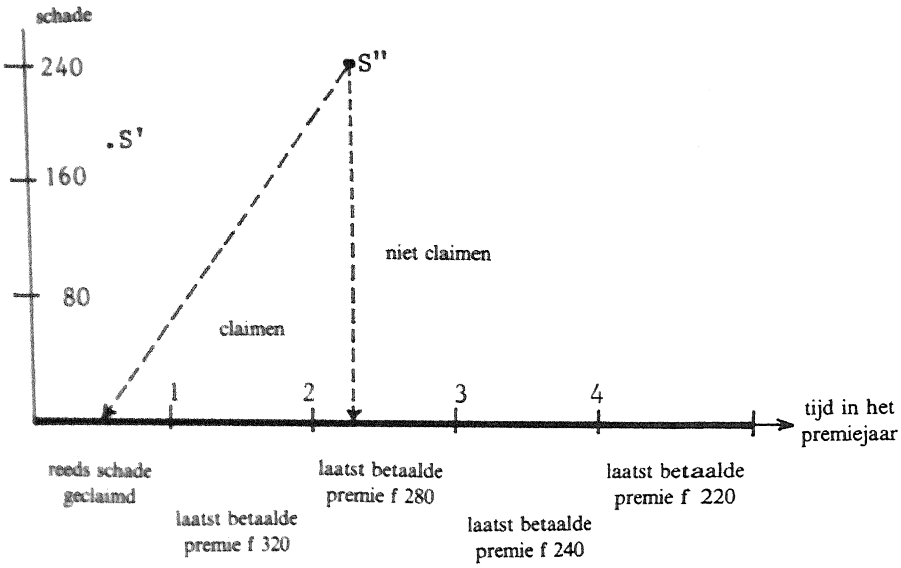
1. De looptijd van de verzekering is één jaar. Aan het eind van ieder jaar kan zij worden verlengd. De premie moet aan het begin van ieder premiejaar worden voldaan.
2. De premie bedraagt f 320,--, tenzij
   a. in de voorafgaande periode van één jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie f 280,--, tenzij
   b. in de voorafgaande periode van twee jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie f 240,--, tenzij
   c. in de voorafgaande periode van drie jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie f 220,--.
3. Indien men een schade wil claimen dient dit onmiddellijk te geschieden. Slechts het verschil tussen de schade en een vast bedrag van f 80,--, het zg. eigen risico, wordt door de verzekering uitbetaald.

Stel dat de automobilist zijn gemiddelde kosten per tijdseenheid in de long run wil minimaliseren. Gevraagd wordt nu voor elk tijdstip aan te geven welke schaden geclaimd moeten worden.

Het is duidelijk dat de automobilist nooit een schade van minder dan f80,-- zal claimen. Het is ook duidelijk, dat hij, als nog geen schade is geclaimd dat jaar, met het oog op de premie-reducties voor schadevrij rijden geen schaden zal claimen, welke slechts een weinig hoger zijn dan het eigen risico. De vraag is nu waar precies de grens ligt tussen de schaden die wel en die niet moeten worden geclaimd. Het behoeft geen betoog, dat de grenswaarden zullen afhangen van de hoogte van de laatst betaalde premie en van het tijdstip van de schade in het premiejaar. In dit voorbeeld wordt de toestand van het systeem bepaald door:

1. de laatst betaald premie;
2. het tijdstip in het premiejaar;
3. de eventueel te claimen schade;
4. de omstandigheid of er al eerder in het premiejaar een schade is geclaimd of niet.

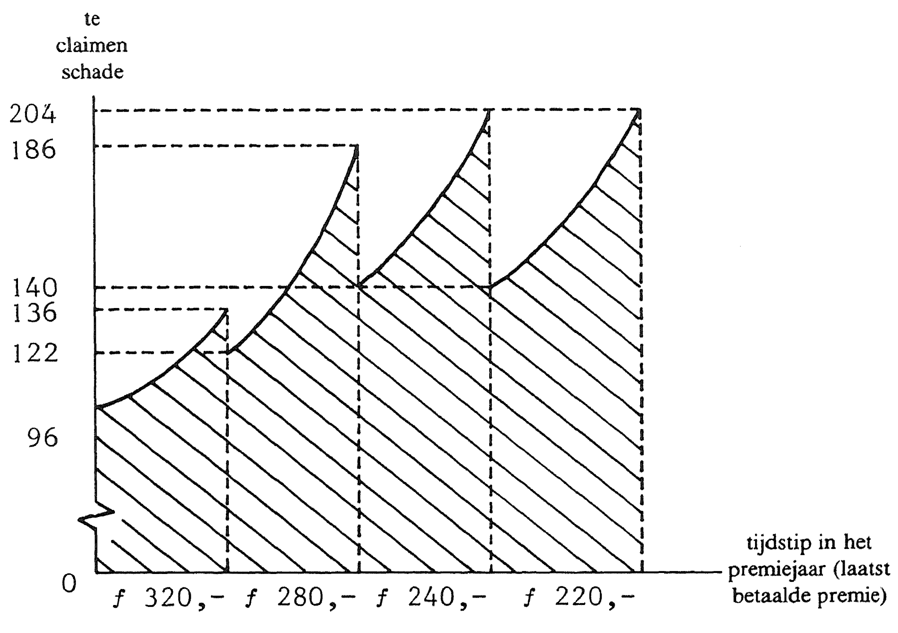
In onderstaande figuur is een afbeelding gegeven van de toestandsruimte. Op de horizontale as zijn 5 intervallen van één jaar aangegeven. Het eerste interval heeft betrekking op een jaar waarin reeds een schade werd geclaimd. Het punt S' duidt aan dat 7 maanden na de laatste premiebetaling



schadevrij gereden sinds laatste premie betaling

wederom een schade plaatsvindt en wel van f 165,--. In 1. zal opnieuw de hoogste premie moeten worden betaald. Premiebetalingen geschieden ook in 2., 3. en 4. Het punt S'' spreekt van een schade van f 240,-- 4 maanden na een premiebetaling van f 280,--, terwijl nog geen schade was geclaimd.

In de volgende figuur hebben wij een strategie aangegeven, die de beslisser adviseert *geen* schade te claimen wanneer het systeem vanwege die schade een toestand aanneeemt in het gearceerde gebied, tenzij reeds eerder in het premiejaar een schade is geclaimd. Uit het voorgaande volgt dat de oplossing van het beslissingsprobleem besliskundig gezien, een keuze is uit de verzameling van alle mogelijke gearceerde gebieden. In dit voorbeeld wordt aangenomen dat tijdens het natuurlijk proces alle schaden worden geclaimd en geen premie wordt betaald. In het natuurlijk proces komt men aan het eind van het premiejaar in de absorptietoestand (0); de schaden zijn niet meer gedekt. Een beslissing is òf de betaling van een premie òf het *niet* melden van een schade.



Als de schade S'' niet gemeld wordt dan gaat de toestand terug naar het overeenkomstige punt op de tijdas. Wordt daarentegen de schade wel geclaimd dan vindt een toestandstransformatie plaats naar het corresponderende punt in het eerste tijdsinterval (zie eerste figuur).

Indien men aanneemt dat het rijgedrag van de automobilist niet wordt beinvloed door schaden en premiebetalingen, dan kan het beslissingsproces van tal van schadeverdelingen worden gedefinieerd. De oplossing van het beslissingsprobleem wordt op een verrassend eenvoudige wijze verkregen.